Kapitel 4

Differential- und Integralrechnung

Das primäre Ziel der Integrationstheorie ist, Flächen unter Funktionsgraphen zu berechnen. Das primäre Ziel der Differentiationstheorie ist es, die Steigung von Funktionen zu berechnen. Im Hauptsatz der Differentialrechnung sehen wir, wie diese beiden Aufgaben in einem engen Zusammenhang stehen.

4.1 Differentiation

Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $x_0 \in D$ so, dass es eine Folge (x_n) gibt mit $x_n \in D \setminus \{x_0\}$, die gegen x_0 konvergiert. Definiere die Sekantensteigung

$$s\colon D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto s(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

f heißt *differenzierbar in* x_0, wenn der Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} s(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Der Grenzwert $f'(x_0)$ ist die Tangentensteigung oder *Ableitung* von f im Punkt x_0.

Beispiele:

- Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, so gilt

  $$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = x + x_0.$$

  Folglich ist f differenzierbar in x_0 und

  $$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} x + x_0 = 2x_0.$$

- Ist $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$, so gilt

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x_0-x}{(xx_0)(x-x_0)} = \frac{-1}{xx_0}.$$

Folglich ist f differenzierbar in $x_0 > 0$ und

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{-1}{xx_0} = \frac{-1}{x_0^2}.$$

- Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp(x)$, so gilt

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\exp(x)-\exp(x_0)}{x-x_0} = \exp(x_0)\frac{\exp(x-x_0)-1}{x-x_0}.$$

Wir benutzen wieder die Rechnung aus Satz 2.5, die zeigt dass

$$|\exp(x)-1-x| \leq \frac{|x|^2}{2}\frac{1}{1-\frac{|x|}{2}} \text{ wenn } |x|<2.$$

Folglich ist f differenzierbar in x_0 und

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \exp(x_0)\big(1+\frac{\exp(x-x_0)-1-(x-x_0)}{x-x_0}\big) = \exp(x_0).$$

Satz 1.1 Ist $f\colon D \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar, so ist sie dort auch stetig.

Satz 1.2 (Rechenregeln für Ableitungen) Seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ differenzierbar, so ist auch

(a) die Funktion $f + g\colon D \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) + g(x)$ in x_0 differenzierbar und

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

(b) die Funktion $fg\colon D \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)g(x)$ in x_0 differenzierbar und

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Beweis:

Beispiel: Wir zeigen durch vollständige Induktion, sie Aussage $A(n)$: Die Funktion $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$ ist überall differenzierbar mit $f_n'(x) = nx^{n-1}$. In der Tat gilt dies für $n = 2$, was wir schon gezeigt haben, und für $n = 1$, was eine Übungsaufgabe ist. Wenn die Aussage für n gezeigt ist, so schreiben wir $f_{n+1} = f_n f_1$ und benutzen (b) um zu sehen, dass f_n überall differenzierbar ist und

$$f_{n+1}'(x) = f_n'(x)f_1(x) + f_n(x)f_1'(x) = nx^{n-1}x + x^n = (n + 1)x^n.$$

Man erhält daraus auch die Ableitungen aller Polynomfunktionen.

Satz 1.3 (Ableitung der Umkehrfunktion) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, streng monoton wachsend und in $x_0 \in [a,b]$ differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist $f^{-1}\colon [f(a), f(b)] \to \mathbb{R}$ in $f(x_0)$ differenzierbar und

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Beweis:

Beispiel: Die Funktion $\log\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ist auf jedem Intervall

$$[\exp(a), \exp(b)] \subset \mathbb{R}_+$$

die Umkehrfunktion von $\exp\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Die Funktion exp ist stetig, streng monoton wachsend und in jedem $y \in [a,b]$ differenzierbar mit $\exp'(y) = \exp(y) \neq 0$. Also ist log in jedem $x \in \mathbb{R}_+$ differenzierbar und wenn $y = \log(x)$, so gilt

$$\log'(x) = \frac{1}{\exp'(y)} = \frac{1}{\exp(y)} = \frac{1}{x}.$$

Satz 1.4 (Kettenregel) Sind $f\colon D \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ differenzierbar, $g\colon E \to \mathbb{R}$ in $f(x_0) \in E$ differenzierbar, und $f(D) \subset E$. Dann ist $g \circ f\colon D \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Beweis:

Beispiel: Sei $g\colon D \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ differenzierbar mit $g(x) > 0$ für alle $x \in D$. Wir zeigen, dass $\frac{1}{g}\colon D \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{g(x)}$ in x_0 differenzierbar ist und berechnen die Ableitung. Ist nämlich $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$, so gilt $\frac{1}{g} = f \circ g$ und $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$ nach einem vorherigen Beispiel. Dann folgt aus der Kettenregel die Differenzierbarkeit in x_0 und

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Satz 1.5 (Mittelwertsatz) Ist $a < b$ und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so existiert ein $\xi \in]a,b[$ mit

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)\,(b-a).$$

Beweis:

4.2 Das Riemannsche Integral

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Wir erinnern kurz an Lemma 3.5, das besagt, dass es eine Folge (a_n) ins $[a,b]$ gibt, so dass $(f(a_n))$ gegen eine obere Schranke von f konvergiert. Diese obere Schranke ist eindeutig bestimmt, und wir nennen sie $\sup_{[a,b]} f$. Anwendung desselben Prinzips auf die Funktion $-f$ liefert eine Folge (a_n) ins $[a,b]$, so dass $(f(a_n))$ gegen eine untere Schranke von f konvergiert, die wir $\inf_{[a,b]} f$ nennen.

Eine *Partition des Intervals* $[a,b]$ ist eine Menge

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

mit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Wir nennen $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ das $k$te Teilintervall, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ seine Länge und

$$\|P\| = \max\{\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n\}$$

die *Feinheit* von P. Wir definieren ferner zu einer beschränkten Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und Partition P die

$$\text{Obersumme } OS_P(f) = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sup_{[x_{k-1},x_k]} f \Big) \Delta x_k$$

$$\text{und Untersumme } US_P(f) = \sum_{k=1}^{n} \Big(\inf_{[x_{k-1},x_k]} f \Big) \Delta x_k.$$

Eigenschaften von Ober und Untersummen, die leicht geprüft werden können:

(i) Es gilt stets $US_P(f) \leq OS_P(f)$.

(ii) Eine Partition P' heißt *Verfeinerung* von P, wenn $P \subset P'$. Es gilt

$$US_P(f) \leq US_{P'}(f) \text{ und } OS_{P'}(f) \leq OS_P(f).$$

(iii) Es gilt

$$\big(\inf_{[a,b]} f\big)(b-a) \leq US_P(f) \text{ und } OS_P(f) \leq \big(\sup_{[a,b]} f\big)(b-a).$$

(iv) Sind P_1, P_2 beliebige Partitionen, so gilt

$$US_{P_1}(f) \leq OS_{P_2}(f).$$

Satz 2.1 und Definition. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen

$$U\!-\!\int_a^b f(x)\,dx \text{ und } O\!-\!\int_a^b f(x)\,dx,$$

die *unteres* bzw. *oberes Darboux-Integral* genannt werden, mit folgenden Eigenschaften

- für alle $\epsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$, so dass für alle Partitionen P mit $\|P\| < \delta$ gilt
$$U\!-\!\int_a^b f(x)\,dx \geq US_P(f) \geq U\!-\!\int_a^b f(x)\,dx - \epsilon.$$
- für alle $\epsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$, so dass für alle Partitionen P mit $\|P\| < \delta$ gilt
$$O\!-\!\int_a^b f(x)\,dx \leq OS_P(f) \leq O\!-\!\int_a^b f(x)\,dx + \epsilon.$$

Wenn das untere und obere Darboux-Integral übereinstimmen, heißt die Funktion f *Riemann integrierbar* und der gemeinsame Wert Riemann-Integral. Er wird mit

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

bezeichnet.

Beweis:

Satz 2.2 Sind $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $c \in \mathbb{R}$, so gilt

(a) $c + f$ ist Riemann-integrierbar und

$$\int_a^b c + f(x)\,dx = c(b-a) + \int_a^b f(x)\,dx.$$

(b) cf ist Riemann-integrierbar und

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

(c) Ist $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Beweis: Das folgt direkt aus der Definition, siehe Übung.

Es gibt zwei Probleme, die wir ansprechen müssen: Wie findet man Beispiele für Riemann-integrierbare Funktionen und wie rechnet man das Integral aus? Für die erste Frage ist das folgende Kriterium wichtig.

Satz 2.3 (Riemannsches Integrabilitätskriterium) Eine beschränkte Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann integrierbar, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ eine Partition P existiert mit

$$OS_P(f) - US_P(f) \leq \epsilon.$$

Beweis:

Mit Hilfe dieses Satzes erhalten wir zwei wichtige Klassen von integrierbaren Funktionen.

Satz 2.4 Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion. Dann ist f Riemann-integrierbar.

Beweis:

Beispiel: Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto x$. Dann ist f als monoton wachsende Funktion Riemann-integrierbar. Wir betrachten Partitionen

$$P_n = \{a + \frac{k}{n}(b-a)\colon k \in \{0,\dots,n\}\}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
OS_{P_n}(f) &= \sum_{k=1}^{n} \big(\sup_{[x_{k-1},x_k]} f\big)\Delta x_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} (a + \frac{k}{n}(b-a))\frac{1}{n} = a + \frac{b-a}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k \\
&= a + \frac{b-a}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = a + \frac{b-a}{2} + (b-a)\frac{1}{2n}.
\end{aligned}$$

und analog

$$US_{P_n}(f) = a + \frac{b-a}{2} - (b-a)\frac{1}{2n}$$

Die Feinheit von P_n ist $1/n$ und nach Satz 2.1 konvergiert damit $(OS_{P_n}(f))$ gegen $O-\int_a^b f(x)\,dx$ und $(US_{P_n}(f))$ gegen $U-\int_a^b f(x)\,dx$. Nach unseren Berechnungen konvergieren beide Folgen gegen

$$a + \frac{b-a}{2} = \frac{b+a}{2}.$$

Also gilt

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b+a}{2}.$$

Wir definieren einen Verschärfung des Stetigkeitsbegriffs. Dei $D \subset \mathbb{R}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt f *gleichmäßig stetig*, wenn für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$ folgt $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Der Unterschied zur Stetigkeit ist, dass δ hier nicht von x abhängen darf. Ein Beispiel einer stetigen Funktion, die nicht gleichmäßig steig ist, ist durch $D = \{x \in \mathbb{R}\colon 0 < x \leq 1\}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ gegeben (Übungsaufgabe).

Satz 2.5 Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine gleichmäßig stetige Funktion. Dann ist f Riemann-integrierbar.

Beweis:

Auf abgeschlossenen Intervallen stellt sich heraus, dass jede stetige Funktion auch gleichmäßig stetig ist, was den vorherigen Satz besonders wertvoll macht.

Satz 2.6 Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, dann ist f auch gleichmäßig stetig.

Beweis:

Damit folgt das folgende Korollar direkt, das uns eine Vielzahl integrierbarer Funktionen liefert.

Korollar 2.7 Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f Riemann-integrierbar.

4.3 Die Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung

Das Berechnen von Integralen über Ober- und Untersummen ist mühsam. Die beiden Hauptsätze stellen einen Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration dar und sind damit auch das wertvollste Werkzeug bei der Berechnung von Integralen.

Die Idee des ersten Hauptsatzes ist, eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ über Teilintervalle $[a,x]$ mit $a \leq x \leq b$ zu integrieren und das Ergebnis als Funktion von x aufzufassen. Dazu benötigen wir die folgenden beiden Lemmas.

Lemma 3.1 Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so ist f auch auf allen Teilintervallen $[a,x]$ und $[x,b]$ Riemann-integrerbar und es gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^x f(x)\,dx + \int_x^b f(x)\,dx.$$

Beweis:

Lemma 3.2 Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so ist auch $|f|$ auch Riemann-integrierbar und es gilt die Dreiecksungleichung

$$\Big|\int_a^b f(x)\,dx\Big| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Beweis:

Satz 3.3 (1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Definiere $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ durch

$$F(y) = \int_a^y f(x)\,dx.$$

Ist dann f in $x \in [a,b]$ stetig, so ist F in x differenzierbar und $F'(x) = f(x)$.

Beweis:

Satz 3.4 (2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
Seien $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a,b]$. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Beweis:

Beispiele:

- Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. Dann ist f als stetige Funktion Riemann-integrierbar. Die Funktion $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{3}x^3$ ist dann eine Stammfunktion von f und es folgt

$$\int_a^b x^2 \, dx = F(b) - F(a) = \frac{1}{3}(b^3 - a^3).$$

- Sei $0 < a < b$ und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$. Dann ist f als stetige Funktion Riemann-integrierbar. Da $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto \log x$ eine Stammfunktion von f ist, folgt

$$\int_a^b \frac{1}{x} \, dx = \log b - \log a = \log\big(\frac{b}{a}\big).$$

4.4 Anwendungen

In diesem Kapitel und den dazugehörigen Übungen diskutieren wir einige wichtige Anwendungen der Differential- und Integralrechnung.

Satz 4.1 (Extremalkriterium) Wenn $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ im Punkt $x \in]a,b[$ einen Maximierer hat und dort differenzierbar ist, so gilt $f'(x) = 0$.

Beweis:

Dieser Satz ist ungeheuer nützlich bei der Suche nach dem Maximierer einer differenzierbaren Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, der nach Satz 3.4 existiert. Nur die Punkte am Rande des Intervalls und die sogenannten kritischen Punkte mit $f'(x) = 0$ sind mögliche Kandidaten!

Satz 4.2 (Integralkriterium) Sei $f\colon [1,\infty[\to \mathbb{R}_+$ monoton fallend. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n),$$

genau dann, wenn der Grenzwert

$$\lim_{N\to\infty} \int_1^N f(x)\,dx$$

exisitiert.

Beweis: